$$= \frac{3h}{8}\left(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+\dots+2f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})\right.$$
$$\left.+f(x_n)\right).$$

3-12-14

► Να προσδιοριστούν οι παράμετροι a_1+a_2 ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)$, $x_i = x_0+ih$, $i=0,1,2,3$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής. Μέχρι πόσου βαθμού πολυώνυμο είναι ακριβής;

Προσδιορίζουμε τις παραμέτρους απαιτώντας να είναι ακριβής ο τύπος για πολυώνυμα μηδενικού, πρώτου κτλ. βαθμού.

$f(x)=p_0(x)=1.$

$I(f)=\int_{x_0}^{x_3} 1dx=[x]_{x_0}^{x_3}=x_3-x_0=3h.$

$Q(f)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 1=a_1+a_2.$

$I(f)=Q(f)\Leftrightarrow a_1+a_2=3h.$

$f(x)=p_1(x)=x$

$I(f)=\int_{x_0}^{x_3} x dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_3}=\frac{x_3^2-x_0^2}{2}=\frac{3h}{2}(x_3+x_0)=\frac{3h}{2}(x_0+3h+x_0)=3hx_0+\frac{9h^2}{2}$

- $Q(f)=a_1x_1+a_2x_2=a_1(x_0+h)+a_2(x_0+2h)=(a_1+a_2)x_0+(a_1+2a_2)h=3hx_0+(a_1+2a_2)h$
- $I(f)=Q(f)\Leftrightarrow a_1+2a_2=\frac{9}{2}\cdot h$

$$\left.\begin{aligned}a_1+a_2&=3h\\ a_1+2a_2&=\tfrac{9}{2}h\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}a_1+a_2&=3h\\ a_2&=\tfrac{3}{2}h\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow a_1=a_2=\frac{3}{2}h$$

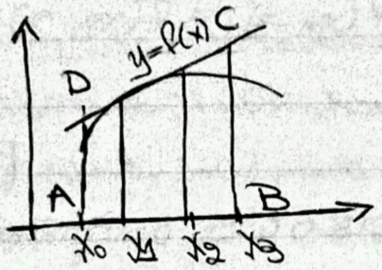
$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx=\frac{3}{2}h(f(x_1)+f(x_2))}$ Ανοιχτός τύπος του τραπεζίου. ⊛

$f(x)=p_2(x)=x^2$

→ $I(f)=\int_{x_0}^{x_3} x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{x_3}=\frac{x_3^3-x_0^3}{3}=\frac{x_3-x_0}{3}(x_3^2+x_3x_0+x_0^2)=h((x_0+3h)^2+(x_0+3h)x_0+x_0^2)=3hx_0^2+9h^2x_0+9h^3.$

→ $Q(f)=\frac{3h}{2}(x_1^2+x_2^2)=\frac{3h}{2}((x_0+h)^2+(x_0+2h)^2)=3hx_0^2+9h^2x_0+\frac{15}{2}h^3$

$I(f)\neq Q(f)$, επομένως ακριβής μέχρι πολυωνύμου 1ου βαθμού.



$$E_{ABCD} = 3h\,\frac{AD+BC}{2} =$$
$$= \frac{3h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right).$$

▶ Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων α, x_0 και x_1, ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \alpha(f(x_0)+f(x_1))$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής. Για πολυώνυμα μέχρι ποιού βαθμού είναι ακριβής;

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=P_0(x)=1:\ \int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2 = I(f) \\ Q(f) = \alpha(1+1) = 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=P_1(x)=x \\ I(f)=\int_{-1}^{1} x\,dx = 0. \\ Q(f) = \alpha(x_0+x_1) = x_0+x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0+x_1=0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=P_2(x)=x^2 \\ I(f)=\int_{-1}^{1} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\ Q(f) = \alpha(x_0^2+x_1^2) = x_0^2+x_1^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0^2+x_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$(x_0+x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2+x_1^2+2x_0x_1 = 0 \Rightarrow 2x_0x_1 = 0-\frac{2}{3} \Rightarrow x_0x_1 = \frac{1}{3}$$

Τα $\underline{x_0, x_1}$ θα είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3},\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$f(x) = P_3(x) = x^3.$

- $I(f) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$
- $Q(f) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 0$ <u>ακριβής</u>

$f(x) = p_4(x) = x^4$.

$I(f) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$.

$Q(f) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}$. Και $I(f) \neq Q(f)$ επομένως ο τύπος <u>είναι ακριβής για πολυων. μέχρι κ' 3ου βαθμού</u>

▶ Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων a και b ώστε ο τύπος αριθ. ολοκλήρωσης $\int_{-1}^{1} f(x)dx = a(f(-1) + f(1)) + b(f'(-1) - f'(1))$ να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

Για πολυώνυμα μέχρι ποιού βαθμού είναι ακριβής?

<u>Λύση.</u>

- $f(x) = p_0(x) = 1$

  $I(f) = \int_{-1}^{1} 1 dx = [x]_{-1}^{1} = 2$

  $Q(f) = a(1+1) + b(0-0) = 2a$

  $\Rightarrow a = 1$.

- $f(x) = p_1(x) = x$

  $I(f) = \int_{-1}^{1} x dx = 0$.

  $Q(f) = a(-1+1) + b(1-1) = 0$.

- $f(x) = p_2(x) = x^2$.

  $I(f) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

  $Q(f) = a(1+1) + b(2(-1) - 2\cdot 1) = 2 - 4b$

  $\Rightarrow 2 - 4b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 4b = 2 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1))$

- $f(x) = p_3(x) = x^3$

  $I(f) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$.

  $Q(f) = (-1)^3 + 1^3 + \frac{1}{3}(3(-1)^2 - 3\cdot 1^2) = 0$

  <u>ακριβής</u>

- $f(x) = p_4(x) = x^4$.

  $I(f) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

  $Q(f) = (-1)^4 + 1^4 + \frac{1}{3}(4(-1)^3 - 4\cdot 1^3) = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$

$I(f) \neq Q(f)$ επομένως <u>ακριβής</u> για μέχρι 3ου βαθμού.

▶ Να προσεγγίσετε το $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$ χρησιμοποιώντας τους σύνθετους κανόνες Τραπεζίου και Simpson. Με $h=\frac{\pi}{3}$

$$Q^T = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin^2 0}{2} + \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{2\pi}{3} + \sin^2\pi + \sin^2\frac{4\pi}{3} + \sin^2\frac{5\pi}{3} + \frac{\sin^2 2\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0\right) = \pi.$$

$$Q^S = \frac{\pi}{9}\left(\sin^2 0 + 4\sin^2\frac{\pi}{3} + 2\sin^2\frac{2\pi}{3} + 4\sin^2\pi + 2\sin^2\frac{4\pi}{3} + 4\sin^2\frac{5\pi}{3} + \sin^2 2\pi\right) = \frac{\pi}{9}\left(0+4\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{4}+4\cdot 0+2\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{4}+0\right) = \pi.$$